**Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"**
**Proba pe echipe, clasele VII-VIII**
**25 noiembrie 2012**

**Soluţii**

**RUNDA a IV-a**

**Problema 1.** Să se determine numerele naturale $n$, ştiind că primele două zecimale ale numărului $\sqrt{n^2+2\cdot n+2}$ sunt zerouri.

**Soluţie:**

Conform cerinţei, avem: $n+1\le\sqrt{n^2+2\cdot n+2}<n+1+\frac{1}{100}\Leftrightarrow$

$n^2+2\cdot n+1\le n^2+2\cdot n+2<n^2+2\cdot n+1+\frac{1}{50}\cdot(n+1)+\frac{1}{10000}\Leftrightarrow$

$1<\frac{n+1}{50}+\frac{1}{10000}\Leftrightarrow n+1>50-\frac{1}{200}\Leftrightarrow n>49-\frac{1}{200}\Rightarrow n\ge 49, n\in\mathbb{N}$

**Răspuns:** $n\ge 49, n\in\mathbb{N}$

**Problema 2.** Să se determine numerele reale $x$ şi y care satisfac relaţia $\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(3\cdot y^2+2\cdot y+3\right)=2$.

**Soluţie:**

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4},\qquad (1)$

$3\cdot y^2+2\cdot y+3=3\cdot\left[\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}\right]\ge\frac{8}{3},\qquad (2)$

Din $(1)\text{si}(2)\Rightarrow\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(3\cdot y^2+2\cdot y+3\right)\ge\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}=2.$

Pentru a avea relaţia din enunţ, trebuie să avem egalitate în (1) şi (2).

Egalitate se obţine pentru $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ \text{y}=-\frac{1}{3}\end{cases}$

**Răspuns:**

$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ \text{y}=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

**Problema 3.** Să se determine toate perechile de numere întregi $(x,y)$ care verifică ecuaţia $x^3+y^3=(x+y)^2$.

**Soluţie:** Observăm că orice pereche de forma $(-k,k), k \in \mathbb{Z}$ este soluţie a ecuaţiei.

Dacă $x+y \neq 0,$ ecuaţia devine $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

În mulţimea numerelor întregi, trebuie ca

$(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0;2]$

şi $(y-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y-1 \leq 1 \Leftrightarrow y \in [0;2];$

Dacă $x=0 \Rightarrow y=1;$

$x=1 \Rightarrow y=0$ *sau* $y=2;$

$x=2 \Rightarrow y=1$ *sau* $y=2.$

Obţinem soluţiile: $\{(-k;k)/k \in \mathbb{Z}\},(0;1),(1;0),(1;2),(2;1);(2;2).$

**Răspuns:** $\{(-k;k)/k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0;1),(1;0),(1;2),(2;1);(2;2)\}.$